Mathematisches Institut der Universität München — SS 17

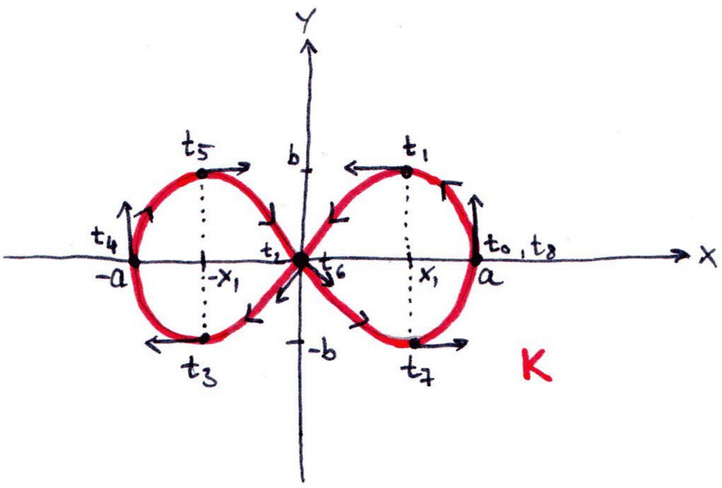
Prof. Dr. Georg Tamme, Thomas Beekenkamp — Blatt 5

Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. (a) Finden Sie eine Kurve α im $\mathbb{R}^2$, deren Bahn K wie eine liegende 8 aussieht.

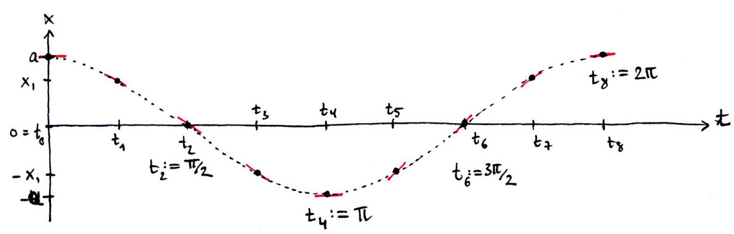
(b) Nimmt die Funktion $f(x, y) = x + y$ auf K ein Maximum an? Wenn ja, können Sie die Stelle $(x, y) \in K$ bestimmen, an der das Maximum angenommen wird?

Lösung (a) Gesucht ist eine Kurve $\alpha : \mathbb{R} \subseteq I \to \mathbb{R}^2$, wobei die Bahn $K = \alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ der Kurve wie eine liegende 8 aussehen soll (vgl. Abbildung). Dazu malen wir uns K auf und überlegen uns für einige auffällige Punkte, welche Werte $\alpha(t)$ und der Tangentialvektor $\alpha'(t)$ dort haben sollten. Daraus ergibt sich die untenstehende Tabelle.



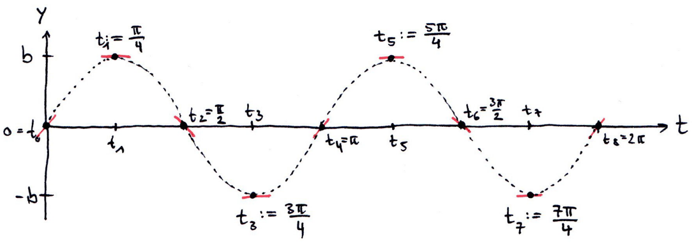
t	$\alpha_x(t)$	$\alpha_y(t)$	$\alpha'_x(t)$	$\alpha'_y(t)$
t_0	a	0	0	> 0
t_1	x_1	b	< 0	0
t_2	0	0	< 0	< 0
t_3	$-x_1$	$-b$	< 0	0
t_4	$-a$	0	0	> 0
t_5	$-x_1$	b	> 0	0
t_6	0	0	> 0	< 0
t_7	x_1	$-b$	> 0	0
t_8	a	0	0	> 0

Jetzt können wir $\alpha_x(t)$ und $\alpha_y(t)$ gesondert betrachten und uns überlegen, welche Funktionen hier passen könnten. Dazu zeichnen wir α_x und α_y in Abhängigkeit von t mit Hilfe der Tabelle auf, indem wir die Punkte t_0 bis t_8 mit den zugehörigen Werten für α_x bzw. α_y in ein Koordinatensystem eintragen, wobei wir $t_0 = 0$ festlegen.



Nun suchen wir eine Funktion, die diese Werte erfüllt. für α_x wählen wir $a\cos(t)$ und können dann a, t_2, t_4, t_6 und t_8 entsprechend festlegen. Wir wählen $a = 2$ und erhalten $\alpha_x(t) = 2\cos(t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

Für $\alpha_y(t)$ gehen wir analog vor, wobei wir beachten müssen, dass wir t_0, t_2, t_4, t_6 und t_8 sowie den Definitionsbereich für t schon festgelegt haben.



Wir wählen als passende Funktion $b\sin(2t)$, wählen $b = 1$, erhalten $\alpha_y(t) = \sin(2t)$ und können die restlichen t_i festlegen.

Zum Schluss kann getestet werden, ob unsere Kurve $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ die Bedingungen aus der Tabelle erfüllt. Außerdem können wir jetzt x_1 berechnen.

$t_n = n\frac{\pi}{4}$	$\alpha_x(t) = 2\cos(t)$	$\alpha_y(t) = \sin(2t)$	$\alpha_x'(t) = -2\sin(t)$	$\alpha_y'(t) = 2\cos(2t)$
$t_0 = 0$	$a = 2$	0	0	$2 > 0$
$t_1 = \pi/4$	$x_1 = \sqrt{2}$	$b = 1$	$-\sqrt{2} < 0$	0
$t_2 = \pi/2$	0	0	$-2 < 0$	$-2 < 0$
$t_3 = 3\pi/4$	$-x_1 = -\sqrt{2}$	$-b = -1$	$-\sqrt{2} < 0$	0
$t_4 = \pi$	$-a = -2$	0	0	$2 > 0$
$t_5 = 5\pi/4$	$-x_1 = -\sqrt{2}$	$b = 1$	$\sqrt{2} > 0$	0
$t_6 = 3\pi/2$	0	0	$2 > 0$	$-2 < 0$
$t_7 = 7\pi/4$	$x_1 = \sqrt{2}$	$-b = 1$	$\sqrt{2} > 0$	0
$t_8 = 2\pi$	$a = 2$	0	0	$2 > 0$

Natürlich gibt es etliche weitere Lösungen, zB. kann man die Kurve stückweise definieren, indem man zwei Einheitskreise nach links bzw. rechts verschiebt und ineinander übergehen lässt. Allerdings muss dann gegebenenfalls Stetigkeit und (falls gefordert) Differenzierbarkeit nachgewiesen werden. Da unsere Kurve eine Kombination differenzierbarer Funktionen ist, können wir darauf verzichten. Außerdem muss stets auf eine eindeutige Richtung geachtet werden, in der die Kurve durchlaufen wird. Diese ergibt sich durch das Festlegen des Definitionsbereichs für t.

(b) Im zweiten Teil der Aufgabe beschränken wir die Funktion $f(x, y) = x + y$ auf K. Wir erhalten eine auf einer Schiefen Ebene liegende 8 (zur Veranschaulichung hilft es, sich die Niveaumengen von $f(x, y)$ aufzumalen. Wir erhalten die Funktion

$$f_K(t) = f(\alpha(t)) = 2\cos(t) + \sin(2t)$$

Da $f_K(t)$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist und die Menge I kompakt in $\mathbb{R}$ ist, nimmt die Funktion f_K ihr (existentes) Maximum in I an. Um die Stelle $(x(t_{max}), y(t_{max}))$, an der f_K maximal ist, zu bestimmen, setzen wir die Ableitung von f_K nach t gleich 0:

$$\frac{\mathrm{d}f_K}{\mathrm{d}t} = -2\sin(t) + 2\cos(2t) \overset{!}{=} 0 \iff sin(t) = cos(2t)$$

Da $f(x,y) = x + y$ für in Richtung positiver $x-$ und $y-$Werte steigt, suchen wir eine Lösung t_{max}, für die $(\alpha_x(t_{max}), \alpha_y(t_{max}))$ im ersten Quadranten liegt, t_{max} sollte also ein Wert zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ sein. Eine Unterhaltung mit www.wolframalpha.com o.Ä. liefert $t_{max} = \frac{\pi}{6}$.

T2. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass auch $f + g\colon U \to \mathbb{R}^m$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix.

(b) Sei nun $m = 1$. Zeigen Sie, dass auch $f \cdot g$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix.

Lösung Da $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar sind, gilt nach Definition 2.20 und Satz 2.25:

$$f(x+\xi) = f(x) + D_f(x)\xi + \phi_f(\xi) \tag{1}$$

mit D_f Jacobimatrix von f und $\phi_f(\xi) = o(\xi)$

$$g(x+\xi) = g(x) + D_g(x)\xi + \phi_g(\xi) \tag{2}$$

mit D_g Jacobimatrix von g und $\phi_g(\xi) = o(\xi)$

(a) Betrachte

$$\begin{aligned}
(f+g)(x+\xi) &= f(x+\xi) + g(x+\xi) \\
&\overset{(1),(2)}{=} f(x) + D_f(x)\xi + \phi_f(\xi) + g(x) + D_g(x)\xi + \phi_g(\xi) \\
&= (f+g)(x) + \underbrace{(D_f(x) + D_g(x))}_{=:D_{f+g}(x)}\xi + \underbrace{\phi_f(\xi) + \phi_g(\xi)}_{=:\phi_{f+g}(\xi)}
\end{aligned}$$

$f + g$ ist also nach Satz 2.25 differenzierbar, da $D_{f+g} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\phi_{f+g}(\xi)}{\|\xi\|} &= \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\phi_f(\xi) + \phi_g(\xi)}{\|\xi\|} \\
&= \underbrace{\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\phi_f(\xi)}{\|\xi\|}}_{\overset{(1)}{=}\, 0} + \underbrace{\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\phi_g(\xi)}{\|\xi\|}}_{\overset{(2)}{=}\, 0} = 0
\end{aligned}$$

(b) Nun sei $m = 1$, also $f, g\colon U \to \mathbb{R}$. Es gilt also $D_f(x) = \nabla f(x)$ und $D_g(x) = \nabla g(x)$. Betrachte $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle $x + \xi$:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x+\xi) = \;& f(x+\xi) \cdot g(x+\xi) \\
\overset{(1),(2)}{=} \;& (f(x) + \nabla f(x)\xi + \phi_f(\xi)) \cdot (g(x) + \nabla g(x)\xi + \phi_g(\xi)) \\
= \;& (f \cdot g)(x) \quad + \quad \underbrace{(f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x))}_{=:D_{f\cdot g}(x)}\xi \\
& + \quad \underbrace{(\nabla f(x)\nabla g(x))\xi^2}_{=:A} \quad + \quad \underbrace{\phi_f(\xi)\phi_g(\xi)}_{=:B} \\
& + \quad \underbrace{\phi_f(\xi)g(x) + \phi_g(\xi)f(x)}_{=:C} \quad + \quad \underbrace{(\phi_f(\xi)\nabla g(x) + \phi_g(\xi)\nabla f(x))\xi}_{=:D}
\end{aligned}$$

Es gilt $A = o(\xi)$:

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{(\nabla f(x)\nabla g(x))\xi^2}{\|\xi\|} \overset{\xi^2 = \|\xi\|^2}{=} \lim_{\|\xi\|\to 0} (\nabla f(x)\nabla g(x))\|\xi\| \quad = \quad 0$$

Sei $h\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt allgemein für festes x:

$$\begin{aligned}
o(\xi)h(x) = o(\xi) \quad & \text{wegen} \quad \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)h(x)}{\|\xi\|} \overset{h(x)\in\mathbb{R}}{=} 0 \\
& \text{und} \quad o(\xi)h(x) = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0 \\
o(\xi)\xi = o(\xi) \quad & \text{wegen} \quad \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)\xi}{\|\xi\|} = 0 \cdot 0 = 0 \\
& \text{und} \quad o(\xi)\xi = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0 \\
o(\xi)o(\xi) = o(\xi) \quad & \text{wegen} \quad \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)o(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)}{\|\xi\|} \cdot \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)\|\xi\|}{\|\xi\|} = 0 \\
& \text{und} \quad o(\xi)o(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0 \\
o(\xi) + o(\xi) = o(\xi) \quad & \text{wegen} \quad \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi) + o(\xi)}{\|\xi\|} = \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)}{\|\xi\|} + \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{o(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \\
& \text{und} \quad o(\xi) + o(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi = 0
\end{aligned}$$

Also gilt $B = o(\xi)$, $C = o(\xi)$ und $D = o(\xi)$, sowie $A + B + C + D = o(\xi)$ und wir definieren $\phi_{f\cdot g}(x) := A + B + C + D$.

Auch $D_{f\cdot g}$ ist wohldefiniert (Definitions- und Wertemengen passen), also ist $f \cdot g$ laut 2.20 und 2.25 differenzierbar, und es gilt:

$$f \cdot g(x+\xi) \quad = \quad f \cdot g(x) \quad + \quad D_{f\cdot g}(x)\xi \quad + \quad \phi_{f\cdot g}(\xi)$$

T3. Welche der folgenden Funktionen sind $o\big((x,y)\big)$?

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $g(x,y) = x^2 + y^2$

(c) $h(x,y) = (x^2+y^2)\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos(x)}$

Lösung Es gilt $r := \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ und man kann schreiben $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}+$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$. Beachte Notation 2.22.

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist überall differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{r\to 0} \frac{xy}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r} = \lim_{r\to 0} r \cdot \underbrace{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}_{\in[-1,1]} = 0$$

$$\text{und} \quad f(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad x = y = 0$$

Also ist $f(x,y) = o((x,y))$.

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist überall differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{r\to 0} \frac{x^2+y^2}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\overbrace{(\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi))}^{=1}}{r} = \lim_{r\to 0} r = 0$$

$$\text{und} \quad g(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad x = y = 0$$

Also ist $g(x,y) = o((x,y))$.

(c) $h(x,y)$ ist nicht überall definiert. Zum einen für alle x, bei denen $\cos(x) = 0$ gilt und zum anderen für $(x,y) = (0,0)$. Ersteres könnten wir durch Einschränken des Definitionsbereichs beheben, letzteres führt aber unweigerlich zu einem Problem, da gilt $h(0,0) \neq 0 \Rightarrow h(x,y) \neq o((x,y))$. Also ist $h(x,y) \neq o((x,y))$, unabhängig von der anderen Bedingung.